Dr. M. Friesen WS 2016/2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Blatt 5

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

(a) Sei X eine nicht leere Menge und seien Abbildungen $f_i : X \longrightarrow T_i$ mit $i \in I$ gegeben, wo $(T_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume sind. Es sei

$$\mathcal{T}_X := \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) := \bigcap_{i \in I} \left\{ f_i^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{T}_i \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum ist.

(b) Es seien $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ zwei metrische Räume. Zeigen Sie, dass

$$d((x,y),(x',y')) := d_1(x,x') + d_2(y,y'), \quad (x,y),(x',y') \in E_1 \times E_2$$

eine Metrik definiert.

(c) Seien E_1, E_2 seperabel. Zeigen Sie, dass $(E_1 \times E_2, d)$ seperabel ist.

(d) Seien E_1, E_2 vollständig. Zeigen Sie, dass $(E_1 \times E_2, d)$ vollständig ist.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Es sei $p(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$. Definiere $p_{n,\alpha}(x) := n^\alpha p(n^\alpha x)$ für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und ein festes $\alpha > 0$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $p_{n,\alpha}$ ist für jedes $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$.

(b) $\mu_n^\alpha(\mathrm{d}x) := p_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x$ konvergiert schwach gegen δ_0.

(c) Zeigen Sie, dass $\{\mu_n^\alpha \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ für jedes feste $\alpha > 0$ straff ist. Einmal durch Zuhilfenahme von Teil (b) und einmal direkt durch die Definition.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Es sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}^d$. Es gelte zusätzlich: Für alle $\varepsilon > 0$ und alle $R > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\int_{B_R^c} p_n(x)\mathrm{d}x < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Hierbei ist $B_R := \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y| \leq R\}$. Zeigen Sie, dass die Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$ gegeben durch $\mu_n(\mathrm{d}x) = p_n(x)\mathrm{d}x$ schwach gegen $\delta_0(\mathrm{d}x)$ konvergiert für $n \to \infty$.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Es sei $\alpha > 0$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $\mathbb{R}$-wertiger Zufallsvariablen, welche uniform auf $[0, \alpha]$ verteilt sind. Setze $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $Z_n := n(\alpha - Y_n)$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von Z_n für $n \to \infty$ schwach gegen die Exponentialverteilung mit Parameter $\frac{1}{\alpha}$ konvergiert.
Hinweis: Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y_n und damit von Z_n. Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion von Z_n gegen die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung zum Parameter $\frac{1}{\alpha}$ konvergiert. Folgern Sie daraus die Behauptung.